proof of functional equation for the theta function*

Mathprof†

2013-03-21 15:39:48

All sums are over all integers unless otherwise specified. Thus the theta function is

$$\theta(x)=\sum_n e^{-\pi n^2 x}.$$

Using the Jacobi's identity for ϑ functions with $z=0$ and $\tau=i/x$, so that $-1/\tau=ix$ gives

$$\theta_3(0\mid ix)=(1/x)^{1/2}\theta_3(0\mid i/x).$$

Using the definition of θ_3 we have that the left hand side is

$$\sum_n e^{-\pi x n^2}=\theta(x)$$

while the right hand side is

$$(1/x)^{1/2}\sum_n e^{i\pi(i/x)n^2}$$

which is

$$(1/x)^{1/2}\sum_n e^{-\pi n^2/x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\theta(1/x)$$

so the identity is established.

The identity is attributed to Poisson by Jacobi [**?**]. Jacobi writes: M. Poisson, dans ses savantes recheches sur les intégrales définies, a fait connaître plusieurs propriétés de la fonction $\Theta(x)$. Les méthodes délicates, propres à cet illustre géomètre, trouvent une belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple, M. Poisson démontre dans dix-neuvième cahier du Journal de l'école polytechnique la formule remarquable:

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+2e^{-16\pi x}+\cdots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+2e^{-\frac{16\pi}{x}}+\cdots}$$

---

*⟨*ProofOfFunctionalEquationForTheThetaFunction*⟩ created: ⟨*2013-03-21*⟩ by: ⟨*Mathprof*⟩ version: ⟨*34023*⟩ Privacy setting: ⟨*1*⟩ ⟨*Proof*⟩ ⟨*11M06*⟩

References

[1] M.C.G.J Jacobi, *Notices sur Les Fonctions Elliptiques*, in Jacobi's Gesammelte Werke, Band 1, Berlin, 1881, page 260.